

Modelos de optimización en el problema de selección de cartera de inversiones



Andrea Coronas Alagón
Trabajo de Fin de Grado en Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Directora del trabajo: Herminia I. Calvete Fernández
28 de junio de 2019

Prólogo

El problema de identificar las inversiones más rentables resulta un desafío para aquellas personas que buscan obtener una rentabilidad por sus ahorros. Por ello, los expertos en finanzas se han implicado en el estudio de diferentes modelos para optimizar las inversiones, tratando de maximizar el beneficio y minimizar el riesgo, en la medida de lo posible. Este trabajo se enmarca en el área de Investigación Operativa y su objetivo es estudiar algunos modelos lineales y cuadráticos que se han propuesto en la literatura para la selección de cartera de inversiones con objeto de aplicarlos posteriormente a las empresas pertenecientes al Ibex 35. La memoria está compuesta por tres capítulos cuyos contenidos se resumen a continuación.

En el capítulo 1 se presenta, en primer lugar, un breve resumen del problema de optimización lineal y del algoritmo simplex que lo resuelve. En segundo lugar, se estudia el problema cuadrático, demostrando algunos de sus principales resultados teóricos. Asimismo, se presenta el problema lineal complementario y un algoritmo para su resolución, junto con los teoremas que garantizan su convergencia bajo determinadas condiciones. Cabe destacar que este algoritmo se puede utilizar para resolver el problema cuadrático a través de las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker. Finalmente, se aplica el algoritmo a un problema cuadrático concreto.

En el capítulo 2 se plantean cuatro modelos para determinar una cartera de inversiones óptima, asegurando la obtención de un retorno mínimo. En primer lugar, se presenta el modelo de Markowitz, que es un modelo cuadrático cuyo objetivo es minimizar la varianza. En segundo lugar, se expone el modelo DAM, que utiliza como medida de riesgo la desviación absoluta media. Este modelo no lineal puede transformarse en un modelo lineal mediante la inclusión de variables adicionales. Asimismo, se estudia el modelo semi-DAM, que solo considera la desviación entre la tasa de retorno y su valor esperado por debajo de este, obteniendo un modelo equivalente al anterior que proporciona la misma cartera óptima. Tanto la varianza como la desviación absoluta media son medidas de riesgo que capturan la variabilidad de la tasa de retorno. Existe otra forma de medir la calidad de una cartera, a partir de lo que se denomina medida de seguridad. El modelo Minimax es un modelo lineal basado en una medida de seguridad que trata de maximizar la peor realización de la tasa de retorno para proteger al inversor de los peores escenarios.

En el capítulo 3 se aplican los modelos mencionados anteriormente a las empresas que pertenecen actualmente al Ibex 35. Para ello, se recogen y se tratan los datos procedentes de estas empresas y se implementan los modelos en Cplex Studio. Con el fin de interpretar la composición de las carteras de inversión, se establece un valor del capital y se exigen diferentes valores del retorno mínimo. Adicionalmente, se plantea el problema de selección de cartera con otro tipo de restricciones que resultan naturales en los problemas reales.

La memoria incluye también un Anexo que muestra los códigos desarrollados para implementar los modelos en Cplex Studio.

Summary

The problem of identifying the most profitable investments is a challenge for people who are looking for a return on their savings. Therefore, experts in finance have been involved in the study of different models to optimize investments. The aim of this work is to study some linear and quadratic models for portfolio selection and then apply them to companies belonging to Ibex 35. The report consists of three chapters that are summarized below.

Chapter 1: The linear and the quadratic models

First, in this chapter the linear model is summarized and the simplex algorithm that solves it is shown.

The linear optimization problem in standard matrix form is formulated as:

$$\begin{aligned} \max (\min) \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{subject to} \quad & \\ & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

The simplex algorithm provides a systematic method to solve this problem. Starting from a basic feasible solution, the algorithm iterates changing from a basic feasible solution to another adjacent basic feasible solution with a better (or at least not worse) value of the objective function. The process continues until an optimal basic feasible solution is reached or an extreme direction (that does not verify certain conditions) is found. If this direction is found, the algorithm concludes indicating that the problem is unbounded.

Second, the quadratic problem and some of its main theoretical results are studied.

The quadratic optimization problem in matrix form is formulated as:

$$\begin{aligned} \min \quad & Q(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{H} \mathbf{x} \\ \text{subject to} \quad & \\ & \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

The Karush-Kuhn-Tucker optimality conditions (KKT) for this problem have been used to develop an algorithm that solves the problem using the simplex algorithm's pivot system. Denoting by \mathbf{y} the vector of slack variables, the KKT conditions for the previous problem can be expressed as:

$$\begin{aligned} -\mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{A}^T \mathbf{u} + \mathbf{v} &= \mathbf{c} \\ \mathbf{u}^T \mathbf{y} &= 0 \\ \mathbf{x}^T \mathbf{v} &= 0 \\ \mathbf{Ax} + \mathbf{y} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x}, \mathbf{v} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{y}, \mathbf{u} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

These conditions can be written as a complementary linear problem which can be solved by means of the complementary pivot algorithm (Lemke algorithm) based on the simplex algorithm.

By introducing a dummy variable, the Lemke algorithm moves between adjacent almost complementary basic feasible solutions until, or a complementary basic feasible solution is obtained, or a direction is found indicating that the region is unbounded. The following theorem shows that, under certain assumptions about the matrix \mathbf{H} , the algorithm converges into a finite number of steps, providing a KKT point.

Theorem 0.1. *Consider the quadratic programming problem. Suppose that the feasible region is non-empty. In addition, suppose that the complementary pivot algorithm is applied to find a solution to the system formed by the KKT conditions.*

In the absence of degeneracy, under any of the following conditions, the algorithm stops in a finite number of iterations with a KKT point:

1. \mathbf{H} is positive semidefinite and $\mathbf{c} \geq \mathbf{0}$.
2. \mathbf{H} is positive definite.
3. \mathbf{H} has nonnegative elements with positive diagonal elements.

Moreover, if \mathbf{H} is positive semidefinite, the ray termination implies that the problem is unbounded.

Chapter 2: Some optimization models for the problem of portfolio selection

In this chapter, three models are presented to determine an optimal portfolio, ensuring a minimum return.

The rate of return at the target time of each asset j is modeled as a random variable R_j . Also, we can look at the uncertainty of the rates of return of the assets at the target time by introducing the concept of scenario: any possible situation that can happen at the target time.

Let us denote by x_j the percentage of the capital invested in the asset j , by $\mu_j = E[R_j]$, by σ_{ij} the covariance between the return rates of the assets i and j (with $i \neq j$), by σ_{jj} the variance of R_j , by p_t the probability that the scenario t will occur, by r_{jt} the realization of the return rate of the asset j under the scenario t and by μ_0 a lower bound for the expected rate of return.

Markowitz Model

The Markowitz model is a quadratic model that tries to minimize the variance by ensuring a minimum value μ_0 for the expected rate of return. The formulation is:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j \\
 \text{subject to} \quad & \sum_{j=1}^n \mu_j x_j \geq \mu_0 \\
 & \sum_{j=1}^n x_j = 1 \\
 & x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n
 \end{aligned}$$

MAD Model

The MAD model uses the mean absolute deviation as a measure of risk. This non-linear model can be transformed into a linear model by including additional variables. The formulation is:

$$\begin{aligned}
 & \min \quad \sum_{t=1}^T p_t d_t \\
 & \text{subject to} \\
 & d_t \geq \sum_{j=1}^n r_{jt} x_j - \sum_{j=1}^n \mu_j x_j, \quad t = 1, \dots, T \\
 & d_t \geq - \left(\sum_{j=1}^n r_{jt} x_j - \sum_{j=1}^n \mu_j x_j \right), \quad t = 1, \dots, T \\
 & \sum_{j=1}^n \mu_j x_j \geq \mu_0 \\
 & \sum_{j=1}^n x_j = 1 \\
 & x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \\
 & d_t \geq 0, \quad t = 1, \dots, T
 \end{aligned}$$

where $d_t = \left| \sum_{j=1}^n r_{jt} x_j - \sum_{j=1}^n \mu_j x_j \right|$.

Minimax Model

The Minimax model is a linear model that tries to maximize the worst performance of the rate of return as a safety measure. Its formulation is:

$$\begin{aligned}
 & \max \quad y \\
 & \text{subject to} \\
 & \sum_{j=1}^n r_{jt} x_j \geq y, \quad t = 1, \dots, T \\
 & \sum_{j=1}^n \mu_j x_j \geq \mu_0 \\
 & \sum_{j=1}^n x_j = 1 \\
 & x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n
 \end{aligned}$$

where y is a dummy variable that, in the optimum, takes the value of the portfolio's rate of return in the worst case scenario.

Chapter 3: Application of portfolio selection models. Companies of Ibex 35

In this chapter the above mentioned models are applied to the companies that currently belong to Ibex 35. In order to interpret the composition of portfolios, we take a capital value (100,000 €) and test different minimum return values: $\mu_0 = 0.001\%$, $\mu_0 = 0.002\%$ and $\mu_0 = 0.003\%$. Additionally, the problem of portfolio selection is raised with other types of constraints that arise very often in real problems. In general, the conclusions obtained are:

- In the three original models, an unfeasible solution is obtained if an average return rate of more than 0.003 % is required.
- In all the models, the higher the average return rate required, the lower the diversification of the portfolio obtained, being this difference less important in the case of the MAD model.
- The selected companies are almost the same for all the models, although the percentages invested in each one differ from one model to another.
- It is worth emphasizing that only 8 out of the 35 companies considered are involved in the optimal portfolios provided by any of the models studied.

Índice general

Prólogo	III
Summary	V
1. El modelo lineal y el modelo cuadrático	1
1.1. El modelo lineal	1
1.1.1. Formulación del problema de programación lineal	1
1.1.2. Condiciones de optimalidad	1
1.1.3. El algoritmo simplex	2
1.2. El modelo cuadrático	3
1.2.1. Formulación del problema de programación cuadrática	3
1.2.2. Condiciones de optimalidad de Karush-Kuhn-Tucker	4
1.2.3. Problema lineal complementario	6
1.2.4. Un algoritmo para la resolución del problema de programación cuadrática	8
2. Algunos modelos de optimización para el problema de la selección de una cartera de in-	13
versiones	
2.1. Planteamiento general del problema de selección de cartera	13
2.2. Modelo de Markowitz (modelo cuadrático)	14
2.3. Modelos lineales	15
2.3.1. Modelos lineales basados en medidas de riesgo	15
2.3.2. Modelo lineal basado en medidas de seguridad	17
3. Aplicación de los modelos de selección de cartera. Empresas del Ibex 35.	19
3.1. Planteamiento general de la cartera analizada	19
3.2. Obtención y tratamiento de los datos	19
3.3. Implementación en Cplex y resultados obtenidos	20
3.3.1. Modelo de Markowitz	20
3.3.2. Modelo DAM	21
3.3.3. Modelo Minimax	22
3.3.4. Modelos con restricciones adicionales	23
3.3.5. Conclusiones	25
Bibliografía	27
Anexo	29

Capítulo 1

El modelo lineal y el modelo cuadrático

1.1. El modelo lineal

El *problema de optimización* es aquel que está relacionado con el uso o asignación de recursos, generalmente escasos, de la mejor manera posible. En esta línea, gran cantidad de problemas pueden aproximarse mediante un modelo lineal. El problema de programación lineal trata de maximizar o minimizar una función lineal sujeta a unas restricciones que pueden escribirse como (in)ecuaciones lineales. Además, puede incluir variables que están condicionadas a ser no negativas, no positivas o no restringidas en signo. Sin embargo, el algoritmo simplex que se describirá más adelante exige que los problemas estén escritos en lo que se denomina la forma estándar.

1.1.1. Formulación del problema de programación lineal

El problema de optimización lineal en forma estándar consiste en determinar los valores de las variables de decisión x_1, \dots, x_n tales que

$$\begin{aligned} \max (\min) \quad & c_1x_1 + \dots + c_nx_n \\ \text{sujeto a} \quad & \\ & a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n = b_k, \quad k = 1, \dots, m \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Como podemos observar, la formulación estándar se caracteriza porque todas las restricciones son igualdades y todas las variables son no negativas. La forma matricial del problema de optimización lineal en forma estándar es:

$$\max (\min) \quad \mathbf{c}^T \mathbf{x} \tag{1.2a}$$

sujeto a

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \tag{1.2b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \tag{1.2c}$$

donde $\mathbf{x}^T = (x_1, \dots, x_n)$ representa el vector de las variables, $\mathbf{b}^T = (b_1, \dots, b_m)$ se denomina vector de recursos, $\mathbf{c}^T = (c_1, \dots, c_n)$ es el vector de coeficientes de la función objetivo y $\mathbf{A} = (a_{ij})$ es la matriz de coeficientes $m \times n$. Supondremos que $m < n$ y que el rango de la matriz \mathbf{A} es m .

1.1.2. Condiciones de optimalidad

Definición. La *región de factibilidad* consiste en un poliedro S de \mathbb{R}^n definido por las restricciones del problema $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$. Una *solución factible* es un punto que pertenece a la región de factibilidad S .

Definición. Una *solución* es un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Definición. Una *solución básica* es una solución con a lo sumo m valores no nulos y tal que los vectores columna de la matriz \mathbf{A} asociados a las componentes no nulas son linealmente independientes.

Una solución básica se obtiene igualando $n - m$ variables a cero y resolviendo el sistema con las variables restantes. Las variables que se hacen cero son las *variables no básicas* y el resto son las *variables básicas*.

La submatriz de la matriz \mathbf{A} formada por los vectores columna asociados a las variables básicas es la base y se denota mediante \mathbf{B} . La submatriz de la matriz \mathbf{A} formada por los vectores columna asociados a las variables no básicas se denota mediante \mathbf{N} .

Definición. Una *solución factible básica* es una solución que es simultáneamente factible y básica. Las solución factible básica corresponden a los puntos extremos de la región de factibilidad.

Definición. Si el problema de optimización lineal es de máximo, se dice que el problema tiene *solución óptima* si existe $\bar{\mathbf{x}} \in S$ tal que $\mathbf{c}^T \bar{\mathbf{x}} \geq \mathbf{c}^T \mathbf{x}$, $\forall \mathbf{x} \in S$. En ese caso, $\bar{\mathbf{x}}$ es una solución óptima.

Si el problema de optimización lineal es de mínimo, ha de ser $\mathbf{c}^T \bar{\mathbf{x}} \leq \mathbf{c}^T \mathbf{x}$, $\forall \mathbf{x} \in S$.

Si el problema de optimización lineal es de máximo, se dice que es un *problema no acotado* si el problema es factible y la función objetivo puede crecer indefinidamente, es decir, $\forall \mathbf{x} \in S$, $\exists \bar{\mathbf{x}} \in S$ tal que $\mathbf{c}^T \bar{\mathbf{x}} > \mathbf{c}^T \mathbf{x}$.

Si el problema de optimización lineal es de mínimo, ha de ser: $\forall \mathbf{x} \in S$, $\exists \bar{\mathbf{x}} \in S$ tal que $\mathbf{c}^T \bar{\mathbf{x}} < \mathbf{c}^T \mathbf{x}$.

Teorema 1.1. Sea el problema de optimización lineal de máximo en forma estándar. Supongamos que la región de factibilidad es no vacía. Sean $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_h$ los puntos extremos y $\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_h$ las direcciones extremas de la región de factibilidad. Una condición necesaria y suficiente para que el problema tenga solución óptima es que

$$\mathbf{c}\mathbf{d}_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, h.$$

Además, si el problema tiene solución óptima, existe un punto extremo que es solución óptima del problema.

Si el problema de optimización es de mínimo, ha de ser $\mathbf{c}\mathbf{d}_i \leq 0$, $i = 1, \dots, h$.

Demostración. ([2, teorema 2.7.1]) □

1.1.3. El algoritmo simplex

El *algoritmo simplex* proporciona un método sistemático para resolver un problema de optimización lineal. Partiendo de una solución factible básica, el algoritmo itera cambiando de una solución factible básica a otra solución factible básica adyacente con un valor mejor (o al menos no peor) de la función objetivo. El proceso continúa hasta que se alcanza una solución factible básica óptima o se encuentra una dirección extrema \mathbf{d} para la que no se verifica la condición del teorema 1.1. Si se encuentra esta dirección, el algoritmo concluye indicando que el problema es no acotado.

Resumen del algoritmo simplex para el problema de máximo

Inicialización. Encontrar una solución factible básica con base asociada la matriz identidad \mathbf{I} .

Iteración típica.

1. **Paso 1.** Sea $\bar{\mathbf{x}}$ una solución factible básica con base asociada $\mathbf{B} = [\mathbf{A}_{B_1} \cdots \mathbf{A}_{B_r} \cdots \mathbf{A}_{B_m}]$ y $\mathbf{A} = [\mathbf{B}, \mathbf{N}]$. Calcular $c_j - z_j = c_j - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_j$, $\forall j$, donde \mathbf{c}_B es el vector de coeficientes de las variables básicas en la función objetivo.
Si $c_j - z_j \leq 0 \quad \forall j$, detener el algoritmo. La actual solución factible básica es óptima.
En otro caso, seleccionar el índice k tal que

$$c_k - z_k = \max \{c_j - z_j\} > 0$$

El índice k está asociado a la matriz \mathbf{N} en la descomposición de \mathbf{A} (es decir, es el índice de una variable que en la actual solución factible básica $\bar{\mathbf{x}}$ es no básica). Si $\mathbf{Y}_k = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_k \leq \mathbf{0}$, detener el algoritmo. El problema es no acotado. La función objetivo crece indefinidamente en los puntos:

$$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \lambda \begin{pmatrix} -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_k \\ \mathbf{e}_k \end{pmatrix}, \quad \lambda \geq 0 \implies \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{c}^T \bar{\mathbf{x}} + \lambda \underbrace{(c_k - z_k)}_{>0} \longrightarrow \infty, \quad \lambda \longrightarrow \infty$$

Si $\mathbf{Y}_k = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_k \not\leq \mathbf{0}$, ir al Paso 2.

2. **Paso 2.** Sea $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$, determinar el índice r tal que

$$\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\} \geq 0$$

Construir la nueva solución factible básica

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{B}} \\ \hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{N}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_k \\ \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}\mathbf{e}_k \end{pmatrix}$$

Su base asociada $\hat{\mathbf{B}}$ se obtiene eliminando la columna \mathbf{A}_{B_r} de \mathbf{B} e introduciendo en su lugar \mathbf{A}_k . Hacer $\bar{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}$, $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{B}}$ y volver al Paso 1.

1.2. El modelo cuadrático

Los problemas de programación no lineal surgen de manera natural en el modelado matemático de muchos problemas del mundo real. Un gran número de estos problemas se pueden formular como problemas de programación cuadrática formados por una función objetivo cuadrática y un conjunto de restricciones lineales de igualdad o desigualdad. La programación cuadrática con restricciones lineales puede verse como una generalización del problema de programación lineal con una función objetivo cuadrática.

1.2.1. Formulación del problema de programación cuadrática

El problema de programación cuadrática trata de determinar el valor de las variables x_1, \dots, x_n que minimizan una función objetivo cuadrática sujeta a un conjunto de restricciones lineales. Su formulación general es la siguiente:

$$\min \quad Q(\mathbf{x}) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n h_{ii}x_i^2 + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n h_{ij}x_ix_j \right) \quad (1.3a)$$

sujeta a

$$a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n \leq b_k, \quad k = 1, \dots, m \quad (1.3b)$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.3c)$$

Con las notaciones ya introducidas, siendo $\mathbf{H} = (h_{ij})$ la matriz $n \times n$ que contiene los coeficientes de la función objetivo, el planteamiento del problema en notación matricial es:

$$\min \quad Q(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{H} \mathbf{x} \quad (1.4a)$$

sujeta a

$$\mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b} \quad (1.4b)$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \quad (1.4c)$$

Sin pérdida de generalidad, se puede asumir que \mathbf{H} es una matriz simétrica. Si no es el caso, se puede transformar en una matriz simétrica reemplazando \mathbf{H} por $(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T)/2$, lo que no cambia el valor de la función objetivo $Q(\mathbf{x})$. Por otro lado, cualquier problema en el que las variables no sean no negativas, puede transformarse en (1.4) mediante una transformación lineal.

Una caracterización de función convexa es que la matriz Hessiana sea semidefinida positiva (ver [2, teorema 3.3.7]). Por tanto, si \mathbf{H} (que coincide con la matriz hessiana de $Q(\mathbf{x})$) es semidefinida positiva, la función objetivo es convexa. De esta manera, cualquier óptimo local es un óptimo global (ver [2, teorema 3.4.2]). Por ello, este tipo de problemas se puede resolver de manera más eficiente. En el caso en el que \mathbf{H} no es semidefinida positiva, encontrar un mínimo global es una tarea más complicada. En lo que sigue, se supondrá que la matriz \mathbf{H} es semidefinida positiva.

1.2.2. Condiciones de optimalidad de Karush-Kuhn-Tucker

El propósito de este apartado es mostrar las condiciones de optimalidad de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) para el problema de programación cuadrática ya que estas han sido utilizadas para desarrollar algoritmos de resolución del problema que utilizan el sistema de pivotación del algoritmo simplex.

Condiciones de KKT para el problema de optimización no lineal

La formulación del problema general de programación no lineal es:

$$\min f(\mathbf{x}) \quad (1.5a)$$

sujeto a

$$g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (1.5b)$$

$$h_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, \dots, l \quad (1.5c)$$

$$\mathbf{x} \in \mathfrak{R} \subseteq \mathbb{R}^n \quad (1.5d)$$

siendo $\mathfrak{R} \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto no vacío.

Supondremos que las funciones $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, y $h_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, l$, son continuamente diferenciables.

Definición. Sea $\bar{\mathbf{x}}$ una solución factible, una restricción de desigualdad $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$ se dice que está *activa* en $\bar{\mathbf{x}}$ si $g_i(\bar{\mathbf{x}}) = 0$ e *inactiva* en $\bar{\mathbf{x}}$ si $g_i(\bar{\mathbf{x}}) < 0$. Por convenio, diremos que una restricción de igualdad está activa en cualquier solución factible.

Definición. Sea $\bar{\mathbf{x}}$ una solución factible e I el conjunto de índices de las restricciones activas en $\bar{\mathbf{x}}$, es decir, $I = \{i : g_i(\bar{\mathbf{x}}) = 0\}$, diremos que $\bar{\mathbf{x}}$ es *regular* si los gradientes de las restricciones de igualdad $(\nabla h_j(\bar{\mathbf{x}}), j = 1, \dots, l)$ y los gradientes de las restricciones de desigualdad activas en $\bar{\mathbf{x}}$ $(\nabla g_j(\bar{\mathbf{x}}), j \in I)$ son linealmente independientes. También diremos que $\bar{\mathbf{x}}$ es regular en el caso en el que no haya restricciones de igualdad y todas las restricciones de desigualdad estén inactivas en $\bar{\mathbf{x}}$.

Teorema 1.2 (Condiciones necesarias de KKT). Sea $\bar{\mathbf{x}}$ un mínimo local regular del problema (1.5) e I el conjunto de índices de las restricciones activas en $\bar{\mathbf{x}}$. Entonces, existen escalares únicos $u_i, i \in I$ y $\hat{u}_j, j = 1, \dots, l$ tal que

$$\begin{aligned} \nabla f(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{i \in I} u_i \nabla g_i(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{j=1}^l \hat{u}_j \nabla h_j(\bar{\mathbf{x}}) &= 0 \\ u_i &\geq 0, \quad i \in I \end{aligned}$$

Demostración. ([2, theorem 4.3.7]) □

Teorema 1.3 (Condiciones suficientes de KKT). Sea $\bar{\mathbf{x}}$ una solución factible del problema (1.5) e I el conjunto de índices de las restricciones activas en $\bar{\mathbf{x}}$. Supongamos que existen escalares $u_i \geq 0, i \in I$ y $\hat{u}_j, j = 1, \dots, l$ tal que

$$\nabla f(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{i \in I} u_i \nabla g_i(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{j=1}^l \hat{u}_j \nabla h_j(\bar{\mathbf{x}}) = 0.$$

Sean ahora $J_1 = \{j : \hat{u}_j > 0\}$ y $J_2 = \{j : \hat{u}_j < 0\}$. Supongamos que $f, g_i, i \in I$ y $h_j, j \in J_1$ son convexas y que $h_j, j \in J_2$ es cóncava. Entonces $\bar{\mathbf{x}}$ es un mínimo global del problema (1.5).

Demostración. ([2, theorem 4.3.8]) □

Además de exigir la factibilidad de $\bar{\mathbf{x}}$, las condiciones de KKT pueden escribirse, de manera equivalente, como:

$$\nabla f(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{i=1}^m u_i \nabla g_i(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{j=1}^l \hat{u}_j \nabla h_j(\bar{\mathbf{x}}) = 0 \quad (1.6a)$$

$$u_i g_i(\bar{\mathbf{x}}) = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (1.6b)$$

$$u_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (1.6c)$$

donde $u_i, i = 1, \dots, m$ y $\hat{u}_j, j = 1, \dots, l$ reciben el nombre de multiplicadores de Lagrange.

Condiciones de KKT para el problema de programación cuadrática

El problema de programación cuadrática (1.3) no tiene restricciones de igualdad, luego el segundo sumatorio de (1.6a) no aparecerá en las condiciones de KKT para el problema de programación cuadrática. Ahora, vamos a identificar cada término de las condiciones de KKT en (1.6a)-(1.6c). En cuanto a la función objetivo (1.3a), el vector gradiente es:

$$\nabla Q(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} c_1 + \frac{1}{2} \cdot 2h_{11}x_1 + \sum_{j=2}^n h_{1j}x_j \\ \vdots \\ c_n + \frac{1}{2} \cdot 2h_{nn}x_n + \sum_{j=1}^{n-1} h_{nj}x_j \end{pmatrix} = \mathbf{c} + \mathbf{H}\mathbf{x} \quad (1.7)$$

Para la restricción k -ésima en (1.3b), el vector gradiente es: $(a_{k1}, \dots, a_{kn})^T$. Para la restricción i -ésima en (1.3c), tras multiplicarla por -1, el vector gradiente es el vector unitario \mathbf{e}_i cambiado de signo. Por tanto, denotando por u_k los multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones (1.3b) y por v_i los multiplicadores de Lagrange de las restricciones (1.3c), el primer sumatorio de la expresión (1.6a) es:

$$\sum_{k=1}^m u_k \begin{pmatrix} a_{k1} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{pmatrix} - \sum_{i=1}^n v_i \mathbf{e}_i = \mathbf{A}^T \mathbf{u} - \mathbf{v}$$

Es decir, (1.6a) se puede escribir como $-\mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{A}^T \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{c}$, donde \mathbf{u} y \mathbf{v} son los vectores que contienen los multiplicadores de Lagrange u_k y v_i , respectivamente. En cuanto a (1.6b), se puede escribir como: $\mathbf{u}^T (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) = 0$ y $\mathbf{x}^T \mathbf{v} = 0$. Por último, (1.6c) junto con (1.3c) equivalen a $\mathbf{x}, \mathbf{v} \geq \mathbf{0}, \mathbf{u} \geq \mathbf{0}$.

En consecuencia, las condiciones de KKT para el problema de programación cuadrática (1.4) pueden expresarse como:

$$-\mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{A}^T \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{c} \quad (1.8a)$$

$$\mathbf{u}^T (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) = 0 \quad (1.8b)$$

$$\mathbf{x}^T \mathbf{v} = 0 \quad (1.8c)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} \leq \mathbf{0} \quad (1.8d)$$

$$\mathbf{x}, \mathbf{v} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{u} \geq \mathbf{0} \quad (1.8e)$$

Aplicando el teorema 1.3, como la función objetivo es convexa bajo la hipótesis de que \mathbf{H} es semidefinida positiva, y como el resto de funciones implicadas son funciones lineales (que son simultáneamente convexas y cóncavas), entonces las condiciones KKT son suficientes para el problema (1.4).

1.2.3. Problema lineal complementario

En esta sección se introduce el problema lineal complementario y se presenta el algoritmo del pivote complementario. Como se mostrará posteriormente, las condiciones KKT para el problema de programación cuadrática se pueden escribir como un problema lineal complementario, y el algoritmo del pivote complementario puede usarse para resolverlo.

Definición. Sea \mathbf{M} una matriz $p \times p$ y \mathbf{q} un vector de dimensión p . El *problema lineal complementario* consiste en buscar vectores \mathbf{w} y \mathbf{z} tal que

$$\mathbf{w} - \mathbf{Mz} = \mathbf{q} \quad (1.9a)$$

$$w_j \geq 0, z_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, p \quad (1.9b)$$

$$w_j z_j = 0, \quad j = 1, \dots, p \quad (1.9c)$$

donde (w_j, z_j) se denomina par de variables complementarias, (1.9c) son las restricciones de complementariedad y (\mathbf{w}, \mathbf{z}) , si existe, es una solución factible básica complementaria. Notemos que si se tiene una solución factible básica de (1.9a)-(1.9b), entonces las variables no básicas son iguales a cero. Además, si para cada par (w_j, z_j) a lo sumo una de las variables es básica, entonces la otra es no básica e igual a 0. Así, se tiene que $w_j z_j = 0$ y por tanto la solución factible básica es solución del sistema completo. Es decir, (\mathbf{w}, \mathbf{z}) es una solución factible básica complementaria si (\mathbf{w}, \mathbf{z}) es una solución factible básica para (1.9a) y (1.9b) con una variable (w_j, z_j) básica para cada $j = 1, \dots, p$.

Para la resolución de este problema, se ha propuesto en la literatura el algoritmo del pivote complementario que itera entre soluciones factibles básicas de manera semejante a como lo hace el algoritmo simplex.

Cómo resolver el problema lineal complementario

Si $\mathbf{q} \geq \mathbf{0}$, $(\mathbf{w}, \mathbf{z}) = (\mathbf{q}, \mathbf{0})$ proporciona una solución de (1.9). En otro caso, sea $\mathbf{1}$ un vector de dimensión p cuyas componentes son todas 1 y sea z_0 una variable artificial, consideremos el problema:

$$\mathbf{w} - \mathbf{Mz} - \mathbf{1}z_0 = \mathbf{q} \quad (1.10a)$$

$$z_0 \geq 0, w_j \geq 0, z_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, p \quad (1.10b)$$

$$w_j z_j = 0, \quad j = 1, \dots, p \quad (1.10c)$$

Notemos que tomando $z_0 = \max\{-q_i : 1 \leq i \leq p\}$, $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{w} = \mathbf{q} + \mathbf{1}z_0$, se dispone de una solución del sistema (1.10). Para poder disponer de una solución del problema lineal complementario se necesita que la variable artificial z_0 tome el valor 0, mientras se satisfacen las condiciones (1.10).

A continuación, se va a considerar la definición de solución factible básica casi complementaria y de solución factible adyacente casi complementaria. Estas definiciones serán útiles tanto para describir el algoritmo como para establecer su convergencia finita.

Definición. Una solución factible $(\mathbf{w}, \mathbf{z}, z_0)$ para el sistema (1.10) se denomina *solución factible básica casi complementaria* si:

1. $(\mathbf{w}, \mathbf{z}, z_0)$ es una solución factible básica para (1.10a) y (1.10b).
2. Tanto w_s como z_s son no básicas, para algún $s \in \{1, \dots, p\}$.
3. z_0 es básica, y exactamente una variable de cada par complementario (w_j, z_j) es básica para $j = 1, \dots, p$ y $j \neq s$.

Dada una solución factible básica casi complementaria $(\mathbf{w}, \mathbf{z}, z_0)$, donde w_s y z_s son ambas no básicas, se obtiene una *solución factible básica adyacente casi complementaria* $(\hat{\mathbf{w}}, \hat{\mathbf{z}}, \hat{z}_0)$ introduciendo w_s o z_s en la base si al pivotar sale de la base una variable distinta de z_0 .

De la definición anterior, se deduce que cada solución factible básica casi complementaria tiene, a lo sumo, dos soluciones factibles básicas adyacentes casi complementarias. Si aumentar w_s o z_s provoca que z_0 salga de la base o produce un rayo del conjunto definido por (1.10a) y (1.10b), se tienen menos de dos soluciones factibles básicas adyacentes casi complementarias.

Resumen del algoritmo de pivote complementario

A continuación, se resume el algoritmo del pivote complementario (desarrollado por C.E. Lemke) para resolver el problema lineal complementario. Al introducir la variable artificial z_0 , el algoritmo se mueve entre soluciones factibles básicas casi complementarias adyacentes hasta que, o se obtiene una solución factible básica complementaria, o se encuentra una dirección que indica que la región definida por (1.10a)-(1.10c) es no acotada. Como se muestra más adelante, bajo ciertas hipótesis sobre la matriz \mathbf{M} , el algoritmo converge en un número finito de pasos, proporcionando una solución factible básica complementaria.

Inicialización. Si $\mathbf{q} \geq 0$: parar; $(\mathbf{w}, \mathbf{z}) = (\mathbf{q}, \mathbf{0})$ es una solución factible básica complementaria. En otro caso, tomar el sistema definido por (1.10) en forma de tabla tipo simplex con \mathbf{w} como variables básicas. Tomar $-q_s = \max\{-q_i : 1 \leq i \leq p\}$ y actualizar la tabla pivotando en la fila s y la columna z_0 . Así, las variables básicas z_0 y $w_j, j = 1, \dots, p$ y $j \neq s$ son no negativas. Tomar $y_s = z_s$ e ir a la iteración principal.

Iteración principal.

1. Sea \mathbf{d}_s la columna actualizada en la tabla actual debajo de la variable y_s . Si $\mathbf{d}_s \leq 0$, ir al paso 4. En otro caso, determinar el índice r tal que:

$$\frac{\bar{q}_r}{d_{rs}} = \min_{1 \leq i \leq p} \left\{ \frac{\bar{q}_i}{d_{is}} : d_{is} > 0 \right\}$$

donde $\bar{\mathbf{q}}$ es la columna del lado derecho actualizada que proporciona los valores de las variables básicas. Si la variable básica en la fila r es z_0 , ir al paso 3. En otro caso, ir al paso 2.

2. La variable básica en la fila r es w_l o z_l , para algún $l \neq s$. La variable y_s entra en la base y la tabla se actualiza pivotando en la fila r y la columna y_s . Si la variable que deja la base es w_l , entonces tomar $y_s = z_l$. Si la variable que deja la base es z_l , entonces, $y_s = w_l$. Ir al paso 1.
3. En este caso, y_s entra en la base, y z_0 deja la base. Pivotar en la columna y_s y en la fila z_0 proporciona una solución factible básica complementaria. Parar.
4. Se ha obtenido un rayo $\mathbf{R} = \{(\mathbf{w}, \mathbf{z}, z_0) + \lambda \mathbf{d} : \lambda \geq 0\}$ tal que cada punto en \mathbf{R} satisface (1.10), donde $(\mathbf{w}, \mathbf{z}, z_0)$ es la solución factible básica casi complementaria asociada a la última tabla, y \mathbf{d} es una dirección extrema del conjunto definido por (1.10a) y (1.10b), que tiene un 1 en la fila correspondiente a y_s , $-\mathbf{d}_s$ en las filas de las variables básicas actuales, y un cero en el resto.

Convergencia finita del algoritmo del pivote complementario

El siguiente lema muestra que el algoritmo termina en un número finito de iteraciones, con una solución factible básica complementaria o encontrando una dirección que muestra la no acotación de la región definida por las restricciones (1.10) (lo que se denomina *terminación de rayo*). Además, bajo ciertas condiciones de la matriz \mathbf{M} , el algoritmo termina con una solución factible básica complementaria.

Lema 1.4. *Supongamos que cada solución factible básica casi complementaria del sistema (1.10) es no degenerada; es decir, cada variable básica es positiva. Entonces, ninguno de los puntos generados por el algoritmo del pivote complementario se repite, y además, el algoritmo debe detenerse en un número finito de pasos.*

Demostración. ([2, lema 11.1.5]) □

Definición. Sea \mathbf{M} una matriz $p \times p$. Se dice que \mathbf{M} es copositiva si $\mathbf{z}^T \mathbf{M} \mathbf{z} \geq 0$ para cada $\mathbf{z} \geq \mathbf{0}$. Además, se dice que \mathbf{M} es copositiva-plus si es copositiva y si $\mathbf{z} \geq \mathbf{0}$ y $\mathbf{z}^T \mathbf{M} \mathbf{z} = 0$ implican que $(\mathbf{M} + \mathbf{M}^T)\mathbf{z} = \mathbf{0}$.

Teorema 1.5. Supongamos que cada solución factible básica casi complementaria del sistema definido por (1.10) es no degenerada, y supongamos que \mathbf{M} es copositiva-plus. Entonces, el algoritmo del pivote complementario se detiene en un número finito de iteraciones. En particular, si el sistema definido por (1.9a) y (1.9b) es consistente, el algoritmo termina con una solución factible básica complementaria del sistema definido por (1.9). Por otro lado, si el sistema definido en (1.9a) y (1.9b) es inconsistente, el algoritmo se detiene con terminación de rayo.

Demostración. ([2, teorema 11.1.8]) □

Corolario 1.6. Si la matriz \mathbf{M} tiene todos sus elementos no negativos, con elementos diagonales positivos, entonces el algoritmo del pivote complementario se detiene en un número finito de pasos con una solución factible básica complementaria.

Demostración. ([2, página 667]) □

1.2.4. Un algoritmo para la resolución del problema de programación cuadrática

En esta sección se va a resolver el problema de programación cuadrática a partir del problema lineal complementario. Denotando mediante \mathbf{y} el vector de variables de holgura de la restricción (1.4b), las condiciones (1.8) pueden expresarse como:

$$-\mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{A}^T \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{c} \quad (1.11a)$$

$$\mathbf{u}^T \mathbf{y} = 0 \quad (1.11b)$$

$$\mathbf{x}^T \mathbf{v} = 0 \quad (1.11c)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{b} \quad (1.11d)$$

$$\mathbf{x}, \mathbf{v} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{y}, \mathbf{u} \geq \mathbf{0} \quad (1.11e)$$

Estas condiciones pueden escribirse como el problema lineal complementario (1.9) considerando:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{A} \\ \mathbf{A}^T & \mathbf{H} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix}$$

Por tanto, el algoritmo del pivote complementario puede usarse para encontrar un punto KKT del problema de programación cuadrática. Los siguientes teoremas estudian su convergencia en este caso particular.

Teorema 1.7. Sea \mathbf{A} una matriz $m \times n$ y \mathbf{H} una matriz simétrica $n \times n$. Si $\mathbf{y}^T \mathbf{H} \mathbf{y} \geq 0$ para cada $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$, entonces la matriz

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{A} \\ \mathbf{A}^T & \mathbf{H} \end{bmatrix}$$

es copositiva. Además, si $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ e $\mathbf{y}^T \mathbf{H} \mathbf{y} = 0$ implican que $\mathbf{H}\mathbf{y} = \mathbf{0}$, entonces \mathbf{M} es copositiva-plus.

Demostración. Primero, veamos que \mathbf{M} es copositiva. Si tomamos $\mathbf{z}^T = (\mathbf{x}^T, \mathbf{y}^T) \geq \mathbf{0}$, entonces

$$\mathbf{z}^T \mathbf{M} \mathbf{z} = (\mathbf{x}^T, \mathbf{y}^T) \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{A} \\ \mathbf{A}^T & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \mathbf{y}^T \mathbf{A}^T \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y} + \mathbf{y}^T \mathbf{H} \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{H} \mathbf{y} \quad (1.12)$$

Por hipótesis, $\mathbf{y}^T \mathbf{H} \mathbf{y} \geq 0$, luego \mathbf{H} es copositiva. Para ver que \mathbf{M} es copositiva-plus, supongamos que $\mathbf{z} \geq \mathbf{0}$ y $\mathbf{z}^T \mathbf{M} \mathbf{z} = 0$. Basta demostrar que $(\mathbf{M} + \mathbf{M}^T)\mathbf{z} = \mathbf{0}$. Como

$$\mathbf{M} + \mathbf{M}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 2\mathbf{H} \end{bmatrix}$$

entonces

$$(\mathbf{M} + \mathbf{M}^T)\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 2\mathbf{H}\mathbf{y} \end{bmatrix}$$

Como $\mathbf{z}^T \mathbf{M} \mathbf{z} = 0$, por (1.12) tenemos que $\mathbf{y}^T \mathbf{H} \mathbf{y} = 0$. Por hipótesis, ya que $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ e $\mathbf{y}^T \mathbf{H} \mathbf{y} = 0$, se tiene que $\mathbf{H} \mathbf{y} = \mathbf{0}$ y por tanto $(\mathbf{M} + \mathbf{M}^T)\mathbf{z} = \mathbf{0}$, es decir, \mathbf{M} es copositiva-plus. \square

Corolario 1.8. Si \mathbf{H} es semidefinida positiva, entonces $\mathbf{y}^T \mathbf{H} \mathbf{y} = 0$ implica que $\mathbf{H} \mathbf{y} = \mathbf{0}$, luego \mathbf{M} es copositiva-plus.

Demostración. Basta probar que $\mathbf{y}^T \mathbf{H} \mathbf{y} = 0$ implica que $\mathbf{H} \mathbf{y} = \mathbf{0}$. Sea $\mathbf{H} \mathbf{y} = \mathbf{d}$, como \mathbf{H} es semidefinida positiva, entonces

$$\mathbf{0} \leq (\mathbf{y}^T - \lambda \mathbf{d}^T) \mathbf{H} (\mathbf{y} - \lambda \mathbf{d}) = \mathbf{y}^T \mathbf{H} \mathbf{y} + \lambda^2 \mathbf{d}^T \mathbf{H} \mathbf{d} - 2\lambda \|\mathbf{d}\|^2$$

Como $\mathbf{y}^T \mathbf{H} \mathbf{y} = 0$, si se divide la igualdad anterior por λ y se toma $\lambda \rightarrow 0^+$, se obtiene que $\mathbf{0} = \mathbf{d} = \mathbf{H} \mathbf{y}$. \square

Corolario 1.9. Si los elementos de \mathbf{H} son no negativos, entonces \mathbf{M} es copositiva. Además, si \mathbf{H} tiene elementos no negativos con elementos diagonales positivos, entonces \mathbf{M} es copositiva-plus.

Demostración. Si los elementos de \mathbf{H} son no negativos, entonces se cumple que $\mathbf{y}^T \mathbf{H} \mathbf{y} \geq 0$ para todo $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$. Luego, por el teorema 1.7, \mathbf{M} es copositiva.

Si $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ e $\mathbf{y}^T \mathbf{H} \mathbf{y} = 0$, entonces se tiene que $\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Por tanto, $\mathbf{H} \mathbf{y} = \mathbf{0}$ y, por el teorema 1.7, \mathbf{M} es copositiva-plus. \square

A continuación se presenta el Teorema de Farkas ya que será aplicado en la demostración del teorema siguiente.

Teorema 1.10 (Teorema de Farkas). Sea $\hat{\mathbf{A}}$ una matriz $m \times n$ y $\hat{\mathbf{c}}$ un n -vector, entonces exactamente uno de los dos siguientes sistemas tiene solución:

- [Sistema 1] : $\hat{\mathbf{A}} \mathbf{w} \leq \mathbf{0}$ y $\hat{\mathbf{c}}^T \mathbf{w} > \mathbf{0}$, para algún $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$.
- [Sistema 2] : $\hat{\mathbf{A}}^T \hat{\mathbf{w}} = \hat{\mathbf{c}}$ y $\hat{\mathbf{w}} \geq \mathbf{0}$, para algún $\hat{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^m$.

Demostración. ([2, teorema 2.4.5]) \square

Teorema 1.11. Consideremos el problema de programación cuadrática (1.4). Supongamos que la región factible es no vacía. Además, supongamos que se aplica el algoritmo del pivote complementario descrito en la sección (1.2.3) para encontrar una solución al sistema (1.11).

En ausencia de degeneración, bajo cualquiera de las siguientes condiciones, el algoritmo se detiene en un número finito de iteraciones con un punto KKT:

1. La matriz \mathbf{H} es semidefinida positiva y $\mathbf{c} \geq \mathbf{0}$.
2. La matriz \mathbf{H} es definida positiva.
3. Los elementos de \mathbf{H} son no negativos y los de la diagonal son positivos.

Además, si \mathbf{H} es semidefinida positiva, la terminación de rayo implica que el problema es no acotado.

Demostración. Por el lema 1.4, el algoritmo del pivote complementario se detiene en un número finito de iteraciones con un punto KKT o una terminación de rayo. Si \mathbf{H} es (semi)definida positiva, o tiene elementos no negativos con elementos diagonales positivos, entonces, por los corolarios 1.8 y 1.9 y el teorema 1.7, \mathbf{M} es copositiva-plus y por tanto, por el teorema 1.5, el algoritmo termina en un número finito de etapas.

Ahora supongamos que se produce la terminación de rayo. Por el teorema 1.5, dado que \mathbf{M} es copositiva-plus, la terminación de rayo es posible solo si el siguiente sistema no tiene solución:

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} + \mathbf{y} &= \mathbf{b} \\ -\mathbf{Hx} - \mathbf{A}^T \mathbf{u} + \mathbf{v} &= \mathbf{c} \\ \mathbf{x}, \mathbf{v} &\geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{y}, \mathbf{u} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Si tomamos

$$\hat{\mathbf{A}}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{H} & \mathbf{0} & -\mathbf{A}^T & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{bmatrix},$$

siendo $\hat{\mathbf{A}}^T$ una matriz de dimensión $(m+n) \times (2m+2n)$, $\hat{\mathbf{w}}$ un vector de dimensión $2m+2n$ y $\hat{\mathbf{c}}$ un vector de dimensión $m+n$, el sistema anterior se corresponde con el sistema 2 del teorema de Farkas.

Si ahora tomamos el vector $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} -\mathbf{f} \\ -\mathbf{d} \end{bmatrix}$, de dimensión $m+n$, podemos pasar del sistema 2 al sistema 1 y así, por el teorema de Farkas, el siguiente sistema debe tener una solución (\mathbf{f}, \mathbf{d}) :

$$\mathbf{A}^T \mathbf{f} - \mathbf{H} \mathbf{d} \geq \mathbf{0} \quad (1.14a)$$

$$\mathbf{f} \geq \mathbf{0} \quad (1.14b)$$

$$\mathbf{A} \mathbf{d} \leq \mathbf{0} \quad (1.14c)$$

$$\mathbf{d} \geq \mathbf{0} \quad (1.14d)$$

$$\mathbf{b}^T \mathbf{f} + \mathbf{c}^T \mathbf{d} < 0 \quad (1.14e)$$

Multiplicando (1.14a) por $\mathbf{d}^T \geq \mathbf{0}$ y notando que $\mathbf{d} \geq \mathbf{0}$ y $\mathbf{A} \mathbf{d} \leq \mathbf{0}$, se sigue que

$$0 \leq \mathbf{d}^T \mathbf{A}^T \mathbf{f} - \mathbf{d}^T \mathbf{H} \mathbf{d} \leq 0 - \mathbf{d}^T \mathbf{H} \mathbf{d} = -\mathbf{d}^T \mathbf{H} \mathbf{d} \quad (1.15)$$

Por hipótesis, existen $\hat{\mathbf{x}}$ y $\hat{\mathbf{y}}$ tal que $\mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{b}$, $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}) \geq \mathbf{0}$. Sustituyendo en (1.14e) y teniendo en cuenta (1.14a) y que $(\mathbf{d}, \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}) \geq \mathbf{0}$, se obtiene:

$$0 > \mathbf{c}^T \mathbf{d} + \mathbf{b}^T \mathbf{f} = \mathbf{c}^T \mathbf{d} + (\hat{\mathbf{y}} + \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{f} \geq \mathbf{c}^T \mathbf{d} + \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}^T \mathbf{f} \geq \mathbf{c}^T \mathbf{d} + \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{H} \mathbf{d} \quad (1.16)$$

Como \mathbf{H} es semidefinida positiva, de (1.15) se deduce que $\mathbf{d}^T \mathbf{H} \mathbf{d} = 0$, y por el corolario 1.8 y el teorema 1.7 se sigue que $\mathbf{H} \mathbf{d} = \mathbf{0}$. Luego, por (1.16), se tiene que $\mathbf{c}^T \mathbf{d} < 0$. Ya que $\mathbf{A} \mathbf{d} \leq \mathbf{0}$ y $\mathbf{d} \geq \mathbf{0}$, \mathbf{d} es una dirección de la región factible, de modo que $\hat{\mathbf{x}} + \lambda \mathbf{d}$ es factible para todo $\lambda \geq 0$. Ahora consideramos $Q(\hat{\mathbf{x}} + \lambda \mathbf{d})$, donde $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} + (1/2) \mathbf{x}^T \mathbf{H} \mathbf{x}$. Como $\mathbf{H} \mathbf{d} = \mathbf{0}$, se obtiene:

$$Q(\hat{\mathbf{x}} + \lambda \mathbf{d}) = Q(\hat{\mathbf{x}}) + \lambda (\mathbf{c}^T + \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{H}) \mathbf{d} + \frac{1}{2} \lambda^2 \mathbf{d}^T \mathbf{H} \mathbf{d} = Q(\hat{\mathbf{x}}) + \lambda \mathbf{c}^T \mathbf{d}$$

Dado que $\mathbf{c}^T \mathbf{d} < 0$, $Q(\hat{\mathbf{x}} + \lambda \mathbf{d})$ tiende a $-\infty$ al elegir λ arbitrariamente grande; así el problema es no acotado.

Para completar la demostración, basta ver que la terminación de rayo no es posible bajo la condición 1, 2 o 3 del teorema. Supongamos que la terminación de rayo se produce en cualquiera de estas condiciones. Entonces, por (1.15), se tiene que $\mathbf{d}^T \mathbf{H} \mathbf{d} \leq 0$. Si se cumple la condición 2 o 3, entonces $\mathbf{d} = \mathbf{0}$, que es imposible según (1.16). Si se cumple la condición 1, entonces $\mathbf{H} \mathbf{d} = \mathbf{0}$. Esto, junto con (1.14d) y el supuesto de que $\mathbf{c} \geq \mathbf{0}$, contradice (1.16).

Por tanto, si \mathbf{H} es semidefinida positiva y el algoritmo se detiene con la terminación de rayo, el problema es no acotado. Además, la terminación de rayo es imposible bajo la condición 1, 2 o 3, por lo que el algoritmo debe proporcionar un punto KKT en cualquiera de estas condiciones. \square

Ejemplo de aplicación del Algoritmo del Pivote Complementario en un problema cuadrático

Consideremos el siguiente problema de programación cuadrática:

$$\min -4x_1 - 3x_2 + 3x_1^2 + 3x_1x_2 + 2x_2^2 \quad (1.17a)$$

sujeto a

$$3x_1 + 2x_2 \leq 6 \quad (1.17b)$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 4 \quad (1.17c)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (1.17d)$$

Siguiendo la notación del problema (1.4), tenemos que:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Como hemos visto anteriormente, este problema se puede resolver como un problema lineal complementario tomando:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{A} \\ \mathbf{A}^T & \mathbf{H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

De este modo, se puede aplicar el algoritmo del pivote complementario como sigue:

Paso Inicial: Introducimos la variable artificial z_0 , obteniendo la siguiente tabla tipo simplex:

	w_1	w_2	w_3	w_4	z_1	z_2	z_3	z_4	z_0	RHS
w_1	1	0	0	0	0	0	3	2	-1	6
w_2	0	1	0	0	0	0	-1	2	-1	4
w_3	0	0	1	0	-3	1	-6	-3	(-1)	-4
w_4	0	0	0	1	-2	-2	-3	-4	-1	-3

→

↑

A continuación, va a entrar en la base z_0 y, como $\min \{q_i | 1 \leq i \leq 4\} = q_3$, va a salir w_3 . Luego pivotamos en la fila 3 y columna z_0 y pasamos a la iteración 1 con $y_s = z_3$.

Iteración 1:

	w_1	w_2	w_3	w_4	z_1	z_2	z_3	z_4	z_0	RHS
w_1	1	0	-1	0	3	-1	9	5	0	10
w_2	0	1	-1	0	3	-1	5	5	0	8
z_0	0	0	-1	0	3	-1	6	3	1	4
w_4	0	0	-1	1	1	-3	(3)	-1	0	1

→

↑

Ahora, va a entrar en la base $y_s = z_3$. Como $\min \left\{ \frac{10}{9}, \frac{8}{5}, \frac{4}{6}, \frac{1}{3} \right\} = \frac{1}{3}$, va a salir de la base w_4 . Luego pivotamos en la fila 4 y columna z_3 y pasamos a la iteración 2 con $y_s = z_4$.

Iteración 2:

	w_1	w_2	w_3	w_4	z_1	z_2	z_3	z_4	z_0	RHS
w_1	1	0	2	-3	0	8	0	8	0	7
w_2	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{5}{3}$	$\frac{4}{3}$	4	0	$\frac{20}{3}$	0	$\frac{19}{3}$
z_0	0	0	1	-2	1	5	0	(5)	1	2
z_3	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	-1	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

↑

Ahora, va a entrar en la base $y_s = z_4$. Como $\min \left\{ \frac{7}{8}, \frac{19}{20}, \frac{2}{5} \right\} = \frac{2}{5}$, va a salir de la base z_0 . Luego pivotamos en la fila z_0 y columna z_4 , obteniendo una solución factible básica complementaria representada en la siguiente tabla:

	w_1	w_2	w_3	w_4	z_1	z_2	z_3	z_4	z_0	RHS
w_1	1	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{8}{5}$	0	0	0	$-\frac{8}{5}$	$\frac{19}{5}$
w_2	0	1	$-\frac{2}{3}$	1	0	$-\frac{8}{3}$	0	0	$-\frac{4}{3}$	$\frac{11}{3}$
z_4	0	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	0	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
z_3	0	0	$-\frac{4}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{1}{15}$	$\frac{7}{15}$

En conclusión, la solución factible básica complementaria está dada por:

$$(w_1, w_2, w_3, w_4, z_1, z_2, z_3, z_4) = \left(\frac{19}{5}, \frac{11}{3}, 0, 0, 0, 0, \frac{7}{15}, \frac{2}{5} \right)$$

donde las variables de holgura asociadas a las restricciones (1.17b) y (1.17c) toman el valor:

$$(y_1, y_2) = (w_1, w_2) = \left(\frac{19}{5}, \frac{11}{3} \right)$$

y los multiplicadores de Lagrange asociados con las restricciones (1.17b), (1.17c) y (1.17d) toman el valor:

$$(u_1, u_2, v_1, v_2) = (z_1, z_2, w_3, w_4) = (0, 0, 0, 0)$$

En definitiva, el algoritmo produce el punto KKT:

$$(x_1, x_2) = (z_3, z_4) = \left(\frac{7}{15}, \frac{2}{5} \right)$$

Como \mathbf{H} es definida positiva, la función objetivo es estrictamente convexa y, por tanto, este punto KKT representa la solución óptima del problema (1.17).

Capítulo 2

Algunos modelos de optimización para el problema de la selección de una cartera de inversiones

2.1. Planteamiento general del problema de selección de cartera

El problema de invertir dinero es común a ciudadanos, familias y empresas que intentan ganar algo de dinero adicional sin exponer sus ahorros a un riesgo muy elevado. Por ello, un gran número de expertos en finanzas se han dedicado a estudiar la selección de carteras, combinando activos de distinta naturaleza, con el fin de obtener una rentabilidad por ello. Se entiende por *cartera* (o *portafolio*) el conjunto de activos en los que invertimos un capital de manera diversificada, y se define *activo* como el instrumento financiero que otorga a su comprador el derecho de recibir ingresos futuros por parte del vendedor.

La teoría de selección de cartera o teoría del portafolio fue desarrollada por primera vez por Harry Markowitz en la década de 1950. Esta teoría identifica los modelos que tratan de optimizar la inversión en activos, al maximizar el retorno esperado de la cartera para un nivel dado de riesgo, o al minimizar el riesgo para un determinado nivel de retorno esperado. La cartera se construye en función de la tolerancia al riesgo de cada inversor.

En este capítulo vamos a presentar algunos modelos para el problema de optimización de una cartera de activos, que serán aplicados a una cartera concreta en el capítulo siguiente.

Conceptos básicos y notación

Sea $N = \{1, \dots, n\}$ el conjunto de activos considerados para una inversión, denotaremos por x_j el porcentaje del capital invertido en el activo $j \in N$ (también llamado *peso del activo j*). Así, $\mathbf{x} = (x_j)$ denota el vector de las variables de decisión que forman la cartera o portafolio.

Durante el periodo de inversión, cada uno de los activos genera una tasa de retorno en el horizonte de inversión que se modela como una variable aleatoria R_j . Denotaremos por $\mu_j = E[R_j]$ y por $\sigma_j^2 = \text{Var}[R_j]$.

Cada portafolio \mathbf{x} tiene asociada la variable aleatoria $R_{\mathbf{x}} = \sum_{j=1}^n R_j x_j$ que representa la tasa de retorno del portafolio. Como la esperanza matemática es un operador lineal, la tasa media de retorno del portafolio \mathbf{x} puede ser expresada como:

$$\mu(\mathbf{x}) = E[R_{\mathbf{x}}] = E\left[\sum_{j=1}^n R_j x_j\right] = \sum_{j=1}^n x_j E[R_j] = \sum_{j=1}^n \mu_j x_j \quad (2.1)$$

y la varianza de la tasa de retorno del portafolio como:

$$\sigma^2(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \sigma_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j$$

siendo σ_{ij} la covarianza entre las tasas de retorno de los activos i y j (con $i \neq j$) y denotando por σ_i^2 o σ_{ii} la varianza del retorno del activo i .

Se denotará mediante μ_0 una cota inferior de la tasa de retorno esperado establecida por el inversor.

Algunos modelos están basados en el concepto de escenario. Un *escenario* es una situación que puede ocurrir en un momento dado, es decir, una posible realización de las tasas de retorno de los activos en ese momento. Dependiendo de lo que suceda entre el tiempo de inversión y el tiempo objetivo, cualquiera de un conjunto de diferentes escenarios puede convertirse en realidad, con mayor o menor probabilidad. Más formalmente, un escenario es una realización de la variable aleatoria multidimensional que representa la tasa de retorno de todos los activos.

Supongamos que se han identificado T escenarios posibles en el momento objetivo y denotemos por p_t la probabilidad de que ocurra el escenario t , con $t = 1, \dots, T$. Para cada variable aleatoria $R_j, j = 1, \dots, n$, denotamos por r_{jt} su realización bajo el escenario t . El conjunto de los retornos de todos los activos $\{r_{jt}, j = 1, \dots, n\}$ define el escenario t .

El retorno esperado del activo $j, j = 1, \dots, n$, puede expresarse como:

$$\mu_j = \sum_{t=1}^T p_t r_{jt}$$

y el retorno y_t del portafolio \mathbf{x} en un escenario t como:

$$y_t(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n r_{jt} x_j \quad (2.2)$$

2.2. Modelo de Markowitz (modelo cuadrático)

Markowitz introdujo el concepto de diversificación y capturó en un modelo la importancia de invertir en una cartera diversificada. Su modelo tiene el objetivo de encontrar un equilibrio entre el riesgo y el retorno de una inversión, es decir, estudia como maximizar el retorno y minimizar el riesgo, mediante una adecuada elección de los componentes de una cartera. Por ello, propone que el inversor debe abordar la cartera como un todo, estudiando las características de riesgo y retorno global, en lugar de escoger valores en virtud del retorno esperado de cada valor. De este modo, Markowitz formalizó matemáticamente los conceptos de retorno y riesgo esperado, estructuró el concepto de diversificación y formuló un modelo de optimización en el que sugirió usar la varianza como una medida de riesgo.

Por tanto, el modelo de Markowitz propone determinar los pesos de los activos resolviendo el siguiente problema cuadrático que minimiza la varianza garantizando la obtención de un valor mínimo μ_0 para la tasa de retorno esperada:

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j \quad (2.3a)$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^n \mu_j x_j \geq \mu_0 \quad (2.3b)$$

$$\sum_{j=1}^n x_j = 1 \quad (2.3c)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.3d)$$

2.3. Modelos lineales

Actualmente, los modelos de programación cuadrática, como el modelo de Markowitz, no son fáciles de resolver, gracias al progreso tecnológico. Sin embargo, los modelos de programación lineal siguen siendo mucho más atractivos desde un punto de vista computacional ya que el desarrollo de software comercial para la solución de estos modelos es más avanzado. Por ello, se han propuesto modelos lineales mediante la discretización de las variables aleatorias de retorno o, de manera equivalente, a través del concepto de escenarios.

Diremos que los retornos se *discretizan* cuando se definen por sus realizaciones en los escenarios especificados, es decir, por el conjunto de valores $\{r_{jt}, j = 1, \dots, n, t = 1, \dots, T\}$. Diremos que una medida de riesgo o de seguridad es *linealmente computable* si el modelo de optimización de cartera presenta una forma lineal en el caso de retornos discretizados.

2.3.1. Modelos lineales basados en medidas de riesgo

A continuación se van a presentar tres modelos cuyas medidas de riesgo son linealmente computables: el modelo DAM, el modelo Semi-DAM y el modelo Minimax.

Modelo DAM

La *desviación absoluta media (DAM)* es una medida de dispersión que se define como

$$\delta(\mathbf{x}) = E[|R_{\mathbf{x}} - E[R_{\mathbf{x}}]|] = E\left[\left|\sum_{j=1}^n R_j x_j - E\left[\sum_{j=1}^n R_j x_j\right]\right|\right] = \sum_{t=1}^T p_t \left|\sum_{j=1}^n r_{jt} x_j - \sum_{j=1}^n \mu_j x_j\right|$$

Así, el problema de optimización de cartera que minimiza la DAM se formula como:

$$\min \quad \delta(\mathbf{x}) = \sum_{t=1}^T p_t \left|\sum_{j=1}^n r_{jt} x_j - \sum_{j=1}^n \mu_j x_j\right| \quad (2.4a)$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^n \mu_j x_j \geq \mu_0 \quad (2.4b)$$

$$\sum_{j=1}^n x_j = 1 \quad (2.4c)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.4d)$$

Este problema no es lineal en las variables x_j debido al valor absoluto de la función objetivo, pero puede transformarse en un modelo lineal. Para ello, introducimos la variable d_t que representa la desviación en el escenario t , es decir, $d_t = \left|\sum_{j=1}^n r_{jt} x_j - \sum_{j=1}^n \mu_j x_j\right|$. De este modo, el problema (2.4) puede formularse como:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{t=1}^T p_t d_t \quad (2.5a) \\
\text{sujeto a} \quad & \\
d_t \geq \quad & \sum_{j=1}^n r_{jt} x_j - \sum_{j=1}^n \mu_j x_j, \quad t = 1, \dots, T \quad (2.5b) \\
d_t \geq \quad & - \left(\sum_{j=1}^n r_{jt} x_j - \sum_{j=1}^n \mu_j x_j \right), \quad t = 1, \dots, T \quad (2.5c) \\
\sum_{j=1}^n \mu_j x_j \geq \quad & \mu_0 \quad (2.5d) \\
\sum_{j=1}^n x_j = \quad & 1 \quad (2.5e) \\
x_j \geq 0, \quad & j = 1, \dots, n \quad (2.5f) \\
d_t \geq 0, \quad & t = 1, \dots, T \quad (2.5g)
\end{aligned}$$

En conclusión, el modelo de optimización (2.5) es un modelo de programación lineal para la optimización de una cartera donde el riesgo se mide a través de la DAM del retorno de la cartera.

Modelo Semi-DAM

La DAM calcula la desviación entre la tasa de retorno y su valor esperado tanto por debajo como por encima de este. Sin embargo, cualquier inversor racional consideraría un riesgo real solo las desviaciones por debajo del valor esperado. Es decir, la variabilidad de la tasa de retorno por encima de la media no debería penalizarse, ya que los inversores están preocupados por el bajo retorno en lugar del retorno excesivo de una cartera. En términos de escenarios, los escenarios de riesgo son aquellos donde la tasa de retorno está por debajo de su valor esperado. Por ello, podemos modificar la definición de la DAM para considerar solo las desviaciones por debajo del valor esperado. Así, definimos la *semi desviación absoluta media* (Semi-DAM) como

$$\bar{\delta}(\mathbf{x}) = E \left[\max \left\{ 0, E \left[\sum_{j=1}^n R_j x_j \right] - \sum_{j=1}^n R_j x_j \right\} \right]$$

donde las desviaciones por encima del valor esperado no se calculan.

El problema de optimización de cartera (2.5), presentado para la DAM, se puede adaptar a la Semi-DAM de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{t=1}^T p_t d_t \quad (2.6a) \\
\text{sujeto a} \quad & \\
d_t \geq \quad & \sum_{j=1}^n \mu_j x_j - \sum_{j=1}^n r_{jt} x_j \quad (2.6b) \\
\sum_{j=1}^n \mu_j x_j \geq \quad & \mu_0 \quad (2.6c) \\
\sum_{j=1}^n x_j = \quad & 1 \quad (2.6d) \\
x_j \geq 0, \quad & j = 1, \dots, n \quad (2.6e) \\
d_t \geq 0, \quad & t = 1, \dots, T \quad (2.6f)
\end{aligned}$$

La formulación para la Semi-DAM es la formulación de la DAM eliminando la desigualdad (2.5b). Si $\mu - y_t > 0$, entonces la tasa de retorno de la cartera y_t en el escenario t está por debajo del valor esperado. En este caso, será $d_t = \mu - y_t$ en el valor óptimo. Si, en cambio, $\mu - y_t \leq 0$, la restricción (2.6b) se vuelve redundante y en el óptimo será $d_t = 0$. Por lo tanto, de esta manera no se calcularían las desviaciones por encima del valor esperado en la función objetivo.

La Semi-DAM parece una medida muy atractiva, que se centra solo en el riesgo por debajo del valor esperado. Sin embargo, se puede ver que es equivalente a la DAM, ya que los modelos de optimización correspondientes generan la misma cartera óptima. Por definición de valor esperado, la suma de las desviaciones por encima del valor esperado es igual a la suma de las desviaciones por debajo del valor esperado. Así, la Semi-DAM es la mitad de la DAM. Minimizar las desviaciones a la baja es equivalente a minimizar las desviaciones totales y equivalente a minimizar también las desviaciones por encima del valor esperado.

2.3.2. Modelo lineal basado en medidas de seguridad

En los apartados anteriores se han visto algunas medidas de riesgo como la varianza (modelo de Markowitz) o la desviación media absoluta (modelo DAM). Estas medidas capturan, de diferentes maneras, la variabilidad de la tasa de retorno de la cartera. Dado el retorno requerido de la cartera μ_0 , el inversor puede desear reducir la variabilidad de la tasa de retorno, es decir, minimizar cualquiera de estas medidas de riesgo. En esta sección se va a analizar otra forma de medir la calidad de una cartera y se va a definir una medida de seguridad específica que será maximizada. El objetivo es proteger al inversor de los peores escenarios, es decir, maximizar la peor realización de la tasa de retorno de la cartera, donde esta se define como

$$M(\mathbf{x}) = \min_{t=1,\dots,T} y_t = \min_{t=1,\dots,T} \sum_{j=1}^n r_{jt} x_j$$

Modelo Minimax

El modelo de optimización de cartera con la peor realización como medida de seguridad, también llamado modelo Minimax, se formula como:

$$\begin{aligned} \max \quad & y \\ \text{sujeto a} \quad & \end{aligned} \tag{2.7a}$$

$$\sum_{j=1}^n r_{jt} x_j \geq y, \quad t = 1, \dots, T \tag{2.7b}$$

$$\sum_{j=1}^n \mu_j x_j \geq \mu_0 \tag{2.7c}$$

$$\sum_{j=1}^n x_j = 1 \tag{2.7d}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \tag{2.7e}$$

donde la variable y es una variable ficticia que, en el óptimo, toma el valor de la tasa de retorno de la cartera en el peor escenario.

Capítulo 3

Aplicación de los modelos de selección de cartera. Empresas del Ibex 35.

3.1. Planteamiento general de la cartera analizada

Actualmente, existen en España unos 2,9 millones de empresas en las que se han invertido, durante el último año 2018, unos 61,5 millones de euros. Por ello, resulta de gran utilidad para los inversores tener un referente nacional e internacional para conocer la situación de la bolsa española, como es el caso del índice Ibex 35.

El Ibex 35 es el índice bursátil de referencia de la bolsa española y está formado por las 35 empresas con más liquidez entre aquellas que cotizan en el Sistema de Interconexión Bursátil Electrónico en las cuatro bolsas españolas. Las empresas con más liquidez son aquellas cuyas acciones se convierten más rápidamente en dinero, es decir, las que a diario representan más compras y ventas. De este modo, estas compañías son las que presentan un mayor número de operaciones en las sesiones bursátiles y reciben un mayor interés por parte de los inversores. En conclusión, el Ibex 35 mide el comportamiento conjunto de las 35 empresas más negociadas.

En este capítulo vamos a aplicar tres de los modelos expuestos anteriormente para seleccionar una cartera de inversión basada en las empresas que pertenecen actualmente al Ibex 35. Los modelos implementados en Cplex para el análisis de la cartera han sido: el modelo de Markowitz (modelo cuadrático), el modelo DAM (modelo lineal basado en la medida de riesgo) y el modelo Minimax (modelo lineal basado en la medida de seguridad). Para interpretar los resultados, los modelos deben ser alimentados con datos. Los datos más importantes, necesarios en todos los modelos presentados, son las tasas de rendimiento de los activos en los diferentes escenarios. Estos valores pueden obtenerse a través de los datos históricos de los diferentes activos, es decir, de las 35 empresas.

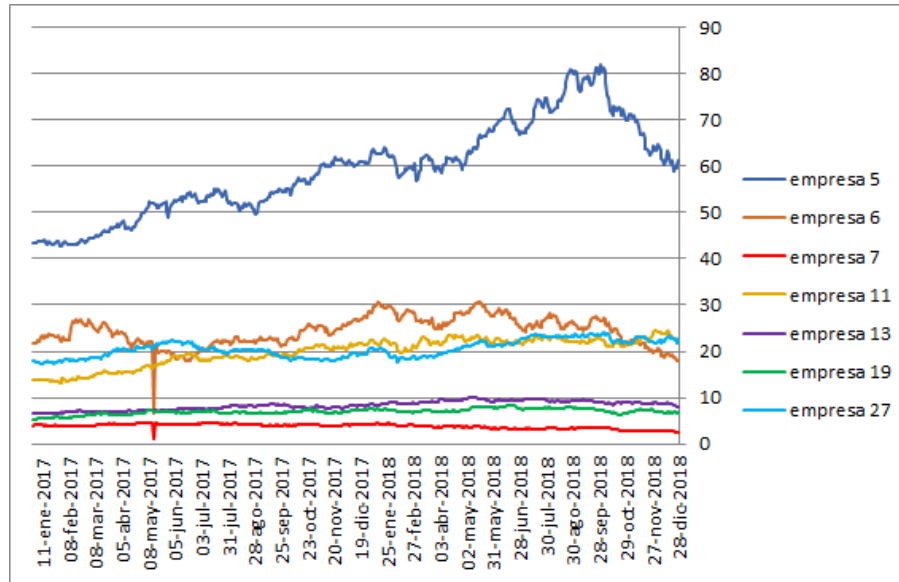
3.2. Obtención y tratamiento de los datos

En esta sección se va a detallar el proceso seguido para obtener los datos necesarios en los modelos de optimización considerados. Como se ha mencionado anteriormente, el conjunto de activos seleccionados para la cartera de inversión está formado por las empresas actuales del Ibex 35 (las cuales no van a ser identificadas por su propio nombre, sino enumeradas). En primer lugar, es necesario conocer el retorno de estas empresas para calcular los estadísticos que intervienen en los modelos. Para ello, se ha descargado, de la página web *Invertia* [6], el histórico de cotizaciones de las 35 empresas, ya que estos valores representan la tasación oficial de los activos en función de las órdenes de compra-venta de estos. Además, estos datos se han contrastado con otras páginas webs ([7], [8] y [9]).

Una vez recopiladas todas las cotizaciones, se han conservado únicamente las correspondientes a los años 2017 y 2018, periodo de tiempo seleccionado para realizar el análisis. Durante este proceso ha surgido una dificultad añadida: en ninguna de las páginas webs anteriores aparece el valor de ciertas cotizaciones diarias de una determinada empresa. Para solventar este problema, se ha optado por calcular

estos valores interpolando a través del valor anterior y posterior. De este modo, el conjunto de datos obtenido contiene el valor de la cotización de cada empresa en cada uno de los 488 días laborables de este periodo (calculados desde el 02/01/2017 hasta el 28/12/2018). En esta línea, se ha decidido tomar las 104 semanas comprendidas entre estas fechas para definir los posibles escenarios involucrados en los modelos lineales.

A continuación, se muestra gráficamente la variación de la cotización de cada empresa durante este periodo de tiempo. Debido al gran número de empresas, se exponen únicamente aquellas en las que, como se verá posteriormente, es más recomendable invertir:



A partir de los valores de las cotizaciones, se han calculado los retornos diarios como:

$$\text{Retorno}(t) = \frac{\text{Cotización}(t) - \text{Cotización}(t-1)}{\text{Cotización}(t-1)}, \quad t = 2, \dots, 488$$

Finalmente, a partir de los retornos diarios de las 35 empresas, se han calculado el resto de datos necesarios en los modelos: el retorno medio de cada empresa, los retornos medios de cada empresa por semanas y la matriz de varianzas-covarianzas correspondiente a los retornos.

3.3. Implementación en Cplex y resultados obtenidos

En esta sección se va a presentar e interpretar la composición de las diferentes carteras de inversión, obtenidas al aplicar los modelos seleccionados. Para ello, se ha establecido un determinado valor del capital (100000 €) y diferentes valores del retorno medio esperado: $\mu_0=0,001$, $\mu_0=0,002$ y $\mu_0=0,003$. Adicionalmente, se van a presentar los resultados obtenidos al plantear la determinación del portafolio con los tres modelos bajo dos tipos de restricciones adicionales que podrían resultar útiles para el inversor, fijando el valor $\mu_0=0,001$.

Se han implementado los modelos en el software *IBM ILOG CPLEX Optimization Studio* (versión 12.6.2). Los códigos correspondientes pueden encontrarse en el Anexo.

3.3.1. Modelo de Markowitz

Las tablas siguientes muestran las empresas en las que se debería invertir según el modelo de Markowitz, junto con el porcentaje del capital que se recomienda invertir y el capital que representa, para los distintos valores de μ_0 . Solo se han incluido las empresas en las que el capital recomendado de inversión es positivo, es decir, las empresas que no aparecen en las tablas siguientes son aquellas en las que el capital a invertir es cero.

$\mu_0=0,001$		
Empresas	Porcentaje	Capital
empresa 11	55,37 %	55367,98 €
empresa 5	31,39 %	31394,18 €
empresa 19	10,56 %	10556,36 €
empresa 7	2,68 %	2677,21 €
Valor de la función objetivo: 0,0001		

$\mu_0=0,002$		
Empresas	Porcentaje	Capital
empresa 11	65,64 %	65637,93 €
empresa 7	34,36 %	34361,86 €
Valor de la función objetivo: 0,0024		

$\mu_0=0,003$		
Empresas	Porcentaje	Capital
empresa 7	70,55 %	70545,22 €
empresa 11	29,45 %	29454,76 €
Valor de la función objetivo: 0,0098		

Como puede observarse, las carteras obtenidas para cada valor de μ_0 difieren bastante entre sí; en particular, cuanto mayor retorno medio se exige, menos diversificada es la cartera. Además, si se exige un valor de μ_0 superior a 0,0038, se obtiene un problema no factible, tanto para este modelo como para los dos modelos que se estudian en los apartados 3.3.2 y 3.3.3. En definitiva, aquellos que estén interesados en asegurar un mayor retorno medio, deben ser conscientes que esto conlleva seleccionar una cartera menos diversificada y, por tanto, más arriesgada.

3.3.2. Modelo DAM

Las tablas siguientes muestran el portafolio obtenido al aplicar el modelo DAM con diferentes valores de μ_0 :

$\mu_0=0,001$		
Empresas	Porcentaje	Capital
empresa 5	30,30 %	30300,72 €
empresa 11	28,03 %	28025,53 €
empresa 19	19,67 %	19670,97 €
empresa 13	13,56 %	13564,52 €
empresa 7	6,98 %	6984,08 €
empresa 27	1,32 %	1317,27 €
empresa 6	0,14 %	136,91 €
Valor de la función objetivo: 0,0037		

$\mu_0=0,002$		
Empresas	Porcentaje	Capital
empresa 7	38,28 %	38280,99 €
empresa 5	25,46 %	25458,77 €
empresa 11	16,83 %	16827,39 €
empresa 13	13,92 %	13922,94 €
empresa 6	2,92 %	2922,61 €
empresa 19	2,59 %	2587,30 €
Valor de la función objetivo: 0,0068		

$\mu_0=0,003$		
Empresas	Porcentaje	Capital
empresa 7	61,99 %	61989,57€
empresa 11	17,19 %	17190,62 €
empresa 6	13,58 %	13583,54 €
empresa 5	7,24 %	7236,26 €
Valor de la función objetivo: 0,0106		

En este caso, se obtienen unos resultados bastante similares para $\mu_0=0,001$ y $\mu_0=0,002$ en cuanto a las empresas seleccionadas (aunque no en cuanto a los porcentajes); en particular, solo abandona la cartera la empresa 27 al aumentar la exigencia sobre el retorno medio. Por el contrario, la cartera resultante para $\mu_0=0,003$ difiere bastante de las anteriores, siendo mucho menos diversificada e invirtiendo más de la mitad del capital en una única empresa, lo que podría resultar un tanto arriesgado. Por otro lado, se observa que, como era de esperar, cuanto mayor retorno medio se exige, mayor desviación entre el retorno y su valor esperado se obtiene, ya que el objetivo de este modelo es minimizar la DAM y esta aumenta a la vez que lo hace el retorno medio exigido.

3.3.3. Modelo Minimax

Las tablas siguientes muestran la cartera de inversión óptima según el modelo Minimax, para los valores de μ_0 seleccionados:

$\mu_0=0,001$		
Empresas	Porcentaje	Capital
empresa 11	30,18 %	30177,21 €
empresa 12	29,36 %	29357,18 €
empresa 5	18,42 %	18416,31 €
empresa 13	12,34 %	12336,24 €
empresa 7	9,71 %	9713,06 €
Valor de la función objetivo: -0,0140		

$\mu_0=0,002$		
Empresas	Porcentaje	Capital
empresa 11	65,64 %	65638,17 €
empresa 7	34,36 %	34361,83 €
Valor de la función objetivo: -0,0547		

$\mu_0=0,003$		
Empresas	Porcentaje	Capital
empresa 7	70,55 %	70545,21 €
empresa 11	29,45 %	29454,79 €
Valor de la función objetivo: -0,1123		

Comparando este modelo con el de Markowitz, se observa que los resultados obtenidos para $\mu_0=0,002$ y $\mu_0=0,003$ son prácticamente los mismos en ambos modelos. Sin embargo, se obtiene una cartera totalmente diferente en el caso $\mu_0=0,001$, tanto por las empresas involucradas, como por los porcentajes de inversión. Por otro lado, cabe destacar que en este caso los valores de la función objetivo son negativos. Esto se debe a que este modelo trata de maximizar el valor de la tasa de retorno en el peor escenario, la cual podría ser negativa en el peor de los casos.

3.3.4. Modelos con restricciones adicionales

En los problemas reales de selección de cartera existen de manera natural otras muchas restricciones. En este apartado, se va a tratar de adaptar los modelos a estas situaciones, en las que el inversor puede considerar útil exigir algún otro tipo de restricciones. En particular, se van a considerar los modelos anteriores imponiendo por separado cada una de las siguientes restricciones:

- **Caso 1:** Invertir, a lo sumo, un 20 % del capital en cada empresa.

La restricción adicional correspondiente se formula como:

$$x_j \leq 0,2, \quad j = 1, \dots, n$$

- **Caso 2:** Si se invierte en una empresa, se debe invertir al menos un capital de 5000 €, es decir:

$$\text{Si } x_j > 0 \text{ para algún } j = 1, \dots, n, \text{ entonces } x_j \cdot C \geq 5000,$$

donde C representa el capital disponible.

Para modelar linealmente el problema bajo esta restricción condicional, es necesario introducir la siguiente variable entera binaria:

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{si } x_j > 0 \\ 0, & \text{si } x_j = 0 \end{cases}$$

Así, la restricción adicional puede modelarse de manera lineal imponiendo las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} 5000 \cdot y_j &\leq C \cdot x_j, & j = 1, \dots, n \\ x_j &\leq y_j, & j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (3.1a)$$

De este modo, sería necesario plantear un problema de optimización lineal entera mixta si el inversor estuviese interesado en imponer una restricción de este tipo.

Caso 1: Modelo de Markowitz, modelo DAM y modelo Minimax

A continuación, se muestran las empresas en las que se debería invertir según cada modelo, para el valor $\mu_0=0,001$ y bajo la restricción adicional 1:

MODELO DE MARKOWITZ		
Empresas	Porcentaje	Capital
empresa 11	20,00 %	20000,00 €
empresa 5	20,00 %	20000,00 €
empresa 19	20,00 %	20000,00 €
empresa 27	20,00 %	20000,00 €
empresa 18	9,45 %	9446,78 €
empresa 7	8,85 %	8849,32 €
empresa 13	1,27 %	1268,37 €
empresa 6	0,44 %	435,59 €
Valor de la función objetivo: 0,0002		

MODELO DAM		
Empresas	Porcentaje	Capital
empresa 19	20,00 %	20000,00 €
empresa 13	20,00 %	20000,00 €
empresa 11	20,00 %	20000,00 €
empresa 5	20,00 %	20000,00 €
empresa 7	8,94 %	8938,97 €
empresa 27	8,23 %	8231,64 €
empresa 26	1,86 %	1859,97 €
empresa 6	0,97 %	969,42 €
Valor de la función objetivo: 0,0038		

MODELO MINIMAX		
Empresas	Porcentaje	Capital
empresa 19	20,00 %	20000,00 €
empresa 12	20,00 %	20000,00 €
empresa 11	20,00 %	20000,00 €
empresa 5	20,00 %	20000,00 €
empresa 7	9.83 %	9828.96 €
empresa 13	6.60 %	6602.46 €
empresa 18	3.57 %	3568.58 €
Valor de la función objetivo: -0,0147		

En los tres modelos se observa que cuatro de las empresas alcanzan el máximo porcentaje de inversión permitido, siendo tres de ellas comunes en los tres modelos. Además, como era de esperar, esta cota superior supone que se obtenga una cartera mucho mas diversificada que la obtenida anteriormente. Asimismo, si se impone que se invierta, a lo sumo, un 8 % del capital en cada empresa, se obtiene un problema no factible.

Caso 2: Modelo de Markowitz, modelo DAM y modelo Minimax

El portafolio óptimo obtenido al aplicar cada modelo para el valor $\mu_0=0,001$ y exigiendo la condición de la restricción adicional 2 es:

MODELO DE MARKOWITZ		
Empresas	Porcentaje	Capital
empresa 11	51,45 %	51447,47 €
empresa 5	29,07 %	29070,64 €
empresa 19	9,48 %	9481,89 €
empresa 13	5,00 %	5000,00 €
empresa 6	5,00 %	5000,00 €
Valor de la función objetivo: 0,0001		

MODELO DAM		
Empresas	Porcentaje	Capital
empresa 5	30,41 %	30410,51 €
empresa 11	27,88 %	27876,73 €
empresa 19	19,96 %	19958,01 €
empresa 13	14,65 %	14653,83 €
empresa 7	7,10 %	7100,91 €
Valor de la función objetivo: 0,0037		

Comparando estos resultados con los obtenidos en 3.3.1 y 3.3.2, se observa que al imponer la restricción adicional en el modelo de Markowitz y en el modelo DAM, abandonan la cartera aquellas empresas en las que originalmente se invertía menos de 5000 €. En su lugar, pasan a formar parte de la cartera dos nuevas empresas en el caso del modelo de Markowitz, mientras que en el modelo DAM se redistribuye ese capital entre el resto de empresas. En cuanto al modelo Minimax, como todas las inversiones eran ya mayores de 5000 € en el portafolio original 3.3.3, no es necesario resolver el problema con la nueva restricción ya que esta no afecta en absoluto a la solución.

3.3.5. Conclusiones

En primer lugar, se ha comprobado que en los tres modelos originales se obtiene un problema no factible si se impone una tasa de retorno diario medio superior a 0,0038. De este modo, se pone de manifiesto que el máximo retorno diario medio que se puede exigir al portafolio si se decide invertir en las empresas pertenecientes al Ibex 35 es 0,0038.

Se verifica también en todos los modelos que, a mayor exigencia sobre el retorno medio, menor diversificación de la cartera, siendo menos notable esta diferencia en el caso del modelo DAM. En esta línea, si el objetivo fuese diversificar la cartera, se debería seleccionar la cartera de inversiones tomando los resultados del modelo DAM, ya que esta es la que recomienda invertir en un mayor número de empresas.

Por otro lado, en los casos que se ha impuesto una restricción adicional, se obtiene, como era de esperar, un valor menos favorable de la función objetivo. En particular, se observa que en el caso 2 la función objetivo empeora menos que en el caso 1, lo que resulta coherente ya que el portafolio obtenido bajo la restricción 2 es más similar al original.

Finalmente, se ha observado que las empresas seleccionadas son prácticamente las mismas para todos los modelos, aunque los porcentajes invertidos en cada una difieren de unos a otros. De hecho, entre los tres modelos originales, se propone invertir únicamente en 8 de las 35 empresas consideradas, de las cuales 3 aparecen en los tres modelos.

Bibliografía

- [1] M. S. BAZARAA, J. J. JARVIS Y H. D. SHERALI, *Linear Programming and Network Flows*, 4.th ed., Wiley, 2010.
- [2] M. S. BAZARAA, H. D. SHERALI Y C. M. SHETTY, *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*, 3.th ed., Wiley, 2006.
- [3] F. J. FABOZZI, P. N. KOLM Y R. TÜTÜNCÜ, *60 Years of portfolio optimization: Practical challenges and current trends*, European Journal of Operational Research, 234: 356–371, 2014.
- [4] R. MANSINI, W. OGRYCZAK Y M. G. SPERANZA, *Twenty years of linear programming based portfolio optimization*, European Journal of Operational Research, 234: 518–535, 2014.
- [5] R. MANSINI, W. OGRYCZAK Y M. G. SPERANZA, *Linear and Mixed Integer Programming for Portfolio Optimization*, Springer, 2015.
- [6] INVERTIA, <https://www.invertia.com/es/>.
- [7] EXPANSION, <http://www.expansion.com/>.
- [8] INVESTING, <https://es.investing.com/>.
- [9] ECONOMISTA, <https://www.eleconomista.es/>.

Anexo

En el presente anexo se incluyen los códigos desarrollados para implementar el modelo de Markowitz, el modelo DAM y el modelo Minimax en Cplex Studio. Conviene señalar que, en los tres modelos, aparecen comentadas tres restricciones y una variable debido a que estas únicamente se activan para resolver los problemas planteados en la sección 3.3.4.

El código siguiente muestra el modelo de Markowitz (2.3), cuyas restricciones (2.3b) y (2.3c) aparecen implementadas, respectivamente, en las líneas 20 y 21.

```
1  /*****
2                                     MODELO DE MARKOWITZ
3  *****/
4
5                                     /* Declaración de variables */
6
7  {string} Inversion = ...;
8  float Retorno[Inversion] = ...;
9  float Covarianza[Inversion][Inversion] = ...;
10 float Cota = ...;
11 float Capital = ...;
12 dvar float+ Porcentaje[Inversion];
13 //dvar boolean Vaux[Inversion];
14
15                                     /* Formulación del Modelo */
16
17 minimize (sum(i,j in Inversion) Covarianza[i][j]*Porcentaje[i]*Porcentaje[j]);
18
19 subject to {
20   CotaRetorno: (sum (i in Inversion) (Porcentaje[i])*(Retorno[i])) >= Cota;
21   Pesos: (sum (i in Inversion) (Porcentaje[i])) == 1;
22   //Caso1: forall (i in Inversion) Porcentaje[i]<=0.2;
23   //Caso2_1: forall (i in Inversion) 5000*Vaux[i]<=Capital*Porcentaje[i];
24   //Caso2_2: forall (i in Inversion) Vaux[i]>=Porcentaje[i];
25 }
```

El código siguiente muestra el modelo DAM (2.5), cuyas restricciones (2.5b), (2.5c), (2.5d) y (2.5e) aparecen implementadas, respectivamente, en las líneas 23-25, 26-28, 29 y 30.

```

1  /*****
2
3  *****/
4
5      /* Declaración de variables */
6
7  {string} Inversion = ...;
8  {string} Semana = ...;
9  float Retorno[Inversion] = ...;
10 float Probabilidad[Semana] = ...;
11 float Realizacion[Semana][Inversion] = ...;
12 float Cota = ...;
13 float Capital = ...;
14 dvar float+ Porcentaje[Inversion];
15 dvar float+ Desviacion[Semana];
16 //dvar boolean Vaux[Inversion];
17
18      /* Formulación del Modelo */
19
20 minimize (sum(t in Semana) Probabilidad[t]*Desviacion[t]);
21
22 subject to {
23     CotaPos: forall (t in Semana) Desviacion[t] >= sum (i in Inversion)
24         Realizacion[t][i]*(Porcentaje[i])-sum (i in Inversion)
25         Retorno[i]*(Porcentaje[i]);
26     CotaNeg: forall (t in Semana) Desviacion[t] >= - sum (i in Inversion)
27         Realizacion[t][i]*(Porcentaje[i])+ sum (i in Inversion)
28         Retorno[i]*(Porcentaje[i]);
29     CotaRetorno: (sum (i in Inversion) (Porcentaje[i])*(Retorno[i])) >= Cota;
30     Pesos: (sum (i in Inversion) (Porcentaje[i])) == 1;
31     //Caso1: forall (i in Inversion) Porcentaje[i]<=0.2;
32     //Caso2_1: forall (i in Inversion) 5000*Vaux[i]<=Capital*Porcentaje[i];
33     //Caso2_2: forall (i in Inversion) Vaux[i]>=Porcentaje[i];
34 }
```


El código siguiente muestra el modelo Minimax (2.7), cuyas restricciones (2.7b), (2.7c) y (2.7d) aparecen implementadas, respectivamente, en las líneas 23-24, 25 y 26.

```

1  /*****
2                                     MODELO MINIMAX
3  *****/
4
5                                     /* Declaración de variables */
6
7  {string} Inversion = ...;
8  {string} Semana = ...;
9  float Retorno[Inversion] = ...;
10 float Cota = ...;
11 float Capital = ...;
12 float Probabilidad[Semana] = ...;
13 float Realizacion[Semana][Inversion] = ...;
14 dvar float+ Porcentaje[Inversion];
15 //dvar boolean Vaux[Inversion];
16 dvar float Vficticia;
17
18                                     /* Formulación del Modelo */
19
20 maximize Vficticia;
21
22 subject to {
23   Lim_inf: forall (t in Semana) (sum (i in Inversion) Realizacion[t][i]*
24     (Porcentaje[i])) >= Vficticia;
25   CotaRetorno: (sum (i in Inversion) (Porcentaje[i])*(Retorno[i])) >= Cota;
26   Pesos: (sum (i in Inversion) (Porcentaje[i])) == 1;
27   //Caso1: forall (i in Inversion) Porcentaje[i]<=0.2;
28   //Caso2_1: forall (i in Inversion) 5000*Vaux[i]<=Capital*Porcentaje[i];
29   //Caso2_2: forall (i in Inversion) Vaux[i]>=Porcentaje[i];
30 }

```